

# Projet LAAS : OUTILS LOGICIELS POUR L'OPTIMISATION EN COMMANDE ET ÉVALUATION DE PERFORMANCE

Responsable du projet : Dimitri Peaucelle

9 Septembre 2003

## Résumé

Le projet consiste à développer une série d'outils logiciels liés aux récents progrès combinés en optimisation et en théorie de la commande. En particulier, seront considérés les développements en cours concernant l'optimisation convexe en programmation semidéfinie (SDP) et fondés sur le formalisme des Inégalités Matricielles Linéaires (LMI). Cet ensemble d'outils logiciels implantés sous Matlab doit constituer une bibliothèque cohérente autour des solveurs SDP actuellement en développement.

Pourquoi un projet logiciel ? Diverses discussions sur les directions futures de recherche en Automatique (<http://www.cds.caltech.edu/murray/cdspanel>) ont souligné l'importance du développement de bons logiciels fiables et robustes disponibles permettant le transfert des résultats les plus récents vers l'industrie et le monde académique. Dans le genre, les diverses boîtes à outils de Matlab ou SciLab de l'INRIA ont montré l'intérêt d'une telle démarche pour la popularisation de résultats de recherche avancée.

Un investissement important (par des chercheurs) dans une activité de développement logiciel de type "boîte à outils" est (à notre avis) justifiée au LAAS dans les cas suivants :

- (a) la toolbox comporte des fonctionnalités nouvelles significatives :
  - au niveau de la modélisation et de l'interface utilisateur même si les outils de base sont connus,
  - au niveau des outils eux-mêmes (élargir la classe des problèmes traités),
- (b) ce logiciel a une bonne visibilité comme contribution LAAS, à savoir :
  - dans un site Internet libre d'accès, (pénétration du monde académique),
  - dans un produit commercial, (vitrine pour les produits freeware).

## Groupe de recherche impliqué : MAC

Denis Arzelier, Didier Henrion, Jean Lasserre et Dimitri Peaucelle

## Évaluateurs potentiels

Hisham Abou-Kandil, Professeur des universités à l'ENS Cachan  
Frédéric Bonnans, Directeur de Recherche à l'INRIA Rocquencourt  
Gilles Duc, Professeur à l'École Supérieure d'Électricité  
Laurent El Ghaoui, Professeur Associé à EECS Department University of California at Berkeley  
Eric Feron, Professeur à Information Control Engineering laboratory, MIT  
José Cláudio Geromel, Professeur à l'Université de Campinas (UNICAMP), Brésil  
Jean-Philippe Vial, Professeur à l'University de Genève

# 1 Résumé des étapes et des produits

Le projet déposé a l'ambition de développer une plate-forme logicielle dans le domaine de la commande et l'optimisation de systèmes. Il comporte deux grandes étapes.

## 1.1 Première étape : Septembre 2003 - Février 2005

Mise en place sur 18 mois de deux volets distincts :

- I. Développements d'algorithmes pour une approche espace d'état comprenant des développements nouveaux en termes de méthodologie et d'interface (responsables Denis Arzelier et Dimitri Peaucelle);
- II. Etudes pour le développement d'un logiciel basé sur le logiciel GloptiPoly déjà développé au LAAS pour l'évaluation de performance dans certains modèles de diffusions (responsable Jean Lasserre).

Pour le points I. l'objectif est la réalisation au bout de la période d'un an et demi d'un produit fini avec pour vocation (le pari du projet) l'intégration du logiciel II. dans une plate-forme en collaboration avec l'Université de Linköping, Suède. Les résultats formeront une boîte à outil complète où seront détaillés les résultats de recherche mis en oeuvre. Cet outil logiciel sera mis à disposition sur un site web. Il servira de tremplin pour une coopération accrue avec l'équipe Control and Communication de l'Université de Linköping.

## 1.2 Seconde étape : Mars 2005 - Août 2006

La seconde étape de 18 mois également est plus prospective et consiste en une extension des produits résultants des points I. et II. Cette étape se détaille en :

- III. Un développement complet du logiciel II. sous environnement Matlab modulaire (responsables Didier Henrion et Jean Lasserre);
- IV. Extension du logiciel I. aux problèmes LMI structurés issus du lemme KYP (responsables Denis Arzelier, Didier Henrion et Dimitri Peaucelle);
- V. Extension du logiciel I. à des outils de programmation non-convexe (responsables Denis Arzelier, Didier Henrion et Dimitri Peaucelle).

Ces trois dernières composantes nécessitent néanmoins un investissement important au niveau recherche fondamentale.

Idéalement étalé sur trois ans, le financement du projet peut être arrêté si après l'étape intermédiaire (18 mois), le pari d'intégration des points I. et II. s'avère douteux.

Dans tous les cas, le choix de développer des outils logiciels associés aux résultats en théorie de la commande ne s'arrêtera pas à ce projet. L'attribution d'un "projet LAAS" permettra l'existence d'une plate-forme fonctionnelle de référence qui pourra par la suite servir d'élément fédérateur pour le développement de modules additionnels.

## 2 Descriptif des éléments du projet

### I. Espace d'état : fonctionnalités nouvelles

Historiquement, le développement du formalisme LMI et des méthodes de résolution SDP trouve son origine dans l'application de la théorie de la stabilité de Lyapunov à des problèmes d'analyse et de synthèse robustes [3]. La notion d'état et la formulation dans l'espace d'état, indispensables dans la théorie de Lyapunov, sont donc au coeur des récents développements obtenus en théorie de la commande robuste par les méthodes LMI. Dans ce cadre, de nombreux problèmes classiques de l'Automatique avancée ont trouvé une solution numérique pertinente par la programmation semidéfinie dont la synthèse  $H_2$  et  $H_\infty$ , ainsi que l'analyse de stabilité et des performances des systèmes dynamiques soumis à des incertitudes de modèle non structurées. Cela a donné lieu à la commercialisation par The MathWorks, Inc. d'une boîte à outils Matlab dédiée à ces méthodes [6].

Dans le même temps, la programmation semidéfinie est devenue un des sujets d'étude les plus importants de la recherche en optimisation. Si de nombreux résultats théoriques ont ainsi été obtenus dans les dix dernières années, l'aspect le plus spectaculaire concerne certainement les développements algorithmiques. Aussi bien les méthodes non différentiables que les méthodes de point intérieur ont permis de développer des solveurs académiques allant au delà de ce que peut actuellement proposer la boîte à outils de MATLAB du point de vue du nombre de variables traitées et de la vitesse de résolution.

Partant de ces constats, notre projet est d'accompagner le développement des nouveaux solveurs SDP et de proposer des routines efficaces et simples d'utilisation pour la commande des systèmes dans l'espace d'état. Les moyens envisagés sont doubles.

Premièrement, nous ferons appel à des outils d'interface entre solveurs tels le logiciel YALMIP développé par Jonas Löfberg de l'Université de Linköping, Suède. Suite à l'expérience de l'outil SeDuMi Interface développé au sein du groupe MAC, l'intégration de YALMIP dans l'outil LAAS se fera en y apportant des fonctionnalités nouvelles. Par exemple, les spécificités numériques des problèmes de commande seront prises en compte par un réglage adapté des paramètres des algorithmes. Pour plus d'éléments voir

<http://www.control.isy.liu.se/~johanl/yalmip.html>  
<http://www.laas.fr/~peaucell/software/SeDuMiInt.html>

Deuxièmement, nous nous attacherons à proposer une bibliothèque complète de fonctions. Elle se devra d'intégrer non seulement les méthodes classiques issues de la commande robuste sous formalisme LMI mais également certains outils plus sophistiqués fondés sur des résultats théoriques récents [11], [5], [1], [12]. L'objet de cette partie du projet est donc de choisir une modélisation adaptée à la formulation des problèmes usuels d'Automatique dans l'espace d'état et permettant d'aborder les principaux problèmes en commande robuste ; puis de réaliser cette bibliothèque.

### II. Conception et III. Développement d'une extension du logiciel GloptiPoly pour l'évaluation de performances

L'évaluation de critères de performance pour des systèmes aléatoires reste un défi numérique dans beaucoup d'applications, d'autant que le recours à la simulation n'est pas toujours possible ou efficace. C'est le cas notamment pour la plupart des modèles en écologie ou finance, fondés sur des équations différentielles stochastiques

$$dX_t = a(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

(cf. Dawson [4]), et avec un critère de performance  $E[\int_0^\tau h(X_s) ds + q(X_\tau)]$  où  $\tau$  est soit fixé a priori, soit un temps d'arrêt. On s'intéresse à la classe des problèmes où les coefficients  $a(X_t)$ ,  $\sigma(X_t)^2$  de (1)

sont des polynômes, et  $h, q$  sont des polynômes par morceaux (e.g. les modèles de prix d'options de Black & Scholes, et les modèles de taux d'intérêt de Vasicek, ou Cox-Ingersoll-Ross).

Pour cette classe de problèmes, une approche possible prometteuse est l'approche par les *moments*. Elle traduit le problème initial en un problème équivalent qui n'inclut que les moments de certaines distributions du processus stochastique  $X_t$  (ou du processus  $(t, X_t)$ ). On peut alors évaluer des bornes supérieures et inférieures sur le critère de performance, de plus en plus fines, par la résolution d'une suite de problèmes d'optimisation dont les variables sont des moments de mesures à déterminer. Les conditions de type *semidéfinie positivité* de certaines matrices de *moments* et de *localisation*, récemment utilisées en optimisation globale, et notamment dans le logiciel GloptiPoly [9], nous semblent particulièrement adaptées à ce type de problèmes.

<http://www.laas.fr/~henrion/software/gloptipoly>

En particulier, nous avons déjà pu montrer sur quelques modèles en finance [10] que cette approche SDP (programmation semidéfinie) est plus efficace que l'approche LP (programmation linéaire) utilisée dans [7]; en effet, pour une même précision elle utilise beaucoup moins de moments.

Le but est donc d'écrire un logiciel spécialisé pour l'approximation du problème générique

$$\min_{\mu_1, \dots, \mu_p} \left\{ \sum_{i=1}^p \int p_i d\mu_i \mid \sum_{i=1}^p \langle \mathcal{A}_i f, \mu_i \rangle = 0 \quad \forall f \in \mathcal{P} \right\},$$

où  $\mathcal{P}$  est l'espace des polynômes réels à  $n$  variables, les mesures  $\mu_i$  sont contraintes à avoir leur support sur un ensemble semi-algébrique  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$  approprié, et les  $\mathcal{A}_i$ 's sont des opérateurs différentiels déduits du générateur infinitésimal  $\mathcal{A}$  de la diffusion (1).

Comme retombée de ce travail, on obtient comme cas particulier, une procédure standard pour l'obtention du minimum global d'une *fraction rationnelle*  $p(x)/q(x)$ , sur un ensemble semi-algébrique  $\Omega$  où le polynôme  $q$  ne change pas de signe.

#### IV. Extension du logiciel I. aux LMI issues du lemme KYP

En collaboration avec Anders Hansson et ses étudiants de l'Université de Linköping en Suède, ainsi qu'avec Lieven Vanbenberghé de l'Université de Californie à Los Angeles et Ragu Balakrishnan de l'Université Purdue, nous comptons étudier différentes méthodes de résolution de LMI structurées de grande taille.

Il s'agit de LMI provenant du lemme de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP), qui établit l'équivalence entre une inégalité matricielle dans le domaine fréquentiel et une LMI impliquant une matrice de Lyapunov généralement de grande dimension. Pour de nombreux problèmes d'aéronautique et de commande des véhicules spatiaux dont les modèles présentent un grand nombre de modes souples et de paramètres incertains, les LMI de type KYP ne peuvent pas être résolues avec les outils de programmation SDP standards. Des problèmes de stabilité numérique apparaissent généralement, et la complexité numérique est souvent trop élevée. La théorie de la dualité de la programmation semidéfinie peut être alors utilisée pour réduire le nombre de variables de manière significative.

Dans le cadre du projet, il s'agit dans un premier temps d'étudier ces méthodes de réduction au niveau théorique (la dualité permet souvent une nouvelle interprétation de résultats classiques, [2]), puis de les étendre et de les appliquer aux problèmes LMI d'analyse et de synthèse robustes (conditions impliquant des variables additionnelles permettant de réduire le pessimisme, incertitudes polytopiques, fonction de Lyapunov dépendant des paramètres). Il est à noter que les formulations algébriques et espace d'état trouvent ici un cadre permettant un traitement numérique unifié. Dans un deuxième temps, après des tests numériques intensifs, l'objectif est d'intégrer ces solveurs spécifiques à la plateforme logicielle I.

## V. Extension du logiciel I. à la programmation non-convexe

En collaboration avec Michal Kočvara de l'Académie des Sciences de la République Tchèque à Prague et Michael Stingl de l'Université d'Erlangen-Nuremberg en Allemagne, nous comptons développer un ensemble de méthodes numériques pour la résolution d'inégalités matricielles non-linéaires et non-convexes (en particulier bilinéaires, ou BMI).

Michal Kočvara est un spécialiste de l'optimisation non-linéaire, avec une grande expérience en optimisation structurelle (travaux avec Ben-Tal et Nemirovski, projets industriels avec EADS sur l'optimisation de la voilure de l'Airbus A380). Un prototype de logiciel dénommé PENBMI est déjà disponible au sein de l'outil commercialisé PENOPT développé par les chercheurs susnommés, voir

<http://www.penopt.com>

Il s'agit d'un outil générique de résolution locale de BMI, basé sur une méthode de Lagrangien augmenté.

Dans le cadre du projet nous comptons collaborer au développement et à la valorisation de cet outil, et tester sa validité pour résoudre des BMI issues de problèmes de commande. De premiers résultats encourageants ont été obtenus récemment sur les BMI de stabilisation simultanée par approche polynomiale ainsi que sur certains problèmes réputés difficiles tels que la stabilisation par des lois de commande de complexité réduite (retour de sortie statique) ou les problèmes de synthèse multi-performance [8].

## 3 Budget

Le financement du projet s'articule autour de deux objectifs. D'une part, le soutien au développement logiciel qui nécessite un investissement matériel (ordinateur avec une puissance de calcul adaptée pour les problèmes de grandes dimensions) ainsi que le financement de stagiaires. D'autre part, une contribution pour les coopération envisagées (missions et ordinateur portable).

Le soutien financier demandé était le suivant :

### **Première étape : Septembre 2003 - Février 2005**

Deux ordinateurs : 10.000 Euros    Stagiaires : 3.000 Euros    Missions : 8.000 Euros

Total première étape : 21.000 Euros

### **Seconde étape : Mars 2005 - Août 2006**

Stagiaires : 3.000 Euros    Missions : 8.000 Euros

Total seconde étape : 11.000 Euros

La commission d'évaluation a conclu à un soutien de 25.000 Euro pour les trois années du projet.

## Références

- [1] D. Arzelier, D. Henrion, and D. Peaucelle. Robust D-stabilization of a polytope of matrices. *Int. J. Control*, 75(10):744–752, 2002.
- [2] V. Balakrishnan and L. Vandenberghe. Semidefinite programming duality and linear time-invariant systems. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 48(1):30–41, January 2003.
- [3] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.
- [4] D.A. Dawson. Geostochastic calculus. *Can. J. Statist.*, 6:143–168, 1978.

- [5] M.C. de Oliveira, J. Bernussou, and J.C. Geromel. A new discrete-time stability condition. *Systems & Control Letters*, 37(4):261–265, July 1999.
- [6] P. Gahinet, A. Nemirovski, A.J. Laub, and M. Chilali. *LMI Control Toolbox User's Guide*. The Mathworks Partner Series, 1995.
- [7] K. Helmes, S. Röhl, and R.H. Stockbridge. Computing moments of the exit time distribution for Markov processes by linear programming. *Oper. Res.*, 49:516–530, 2001.
- [8] D. Henrion, M. Kočvara, and M. Stingl. Solving simultaneous stabilization bmi problems with PENNON. In *IFIP TC 7 Conference on System Modelling and Optimization*, Sophia Antipolis, France, 2003.
- [9] D. Henrion and J.B. Lasserre. GloptiPoly: global optimization over polynomials with Matlab and SeDuMi. *ACM trans. on Mathematical Software*, 29(2), 2003.
- [10] J.B. Lasserre and T. Prieto. SDP vs. LP-relaxations for the moment approach in some performance evaluation problems. Technical Report #03125, LAAS, Toulouse, March 2003.
- [11] D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier, and J. Bernussou. A new robust D-stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems & Control Letters*, 40(1):21–30, May 2000.
- [12] D. Peaucelle, D. Arzelier, and R. Bertrand. Ellipsoidal sets for static output feedback. In *15th IFAC World Congress*, Barcelona, July 2002.