Approximation, échantillonnage et vote pour des systèmes mixtes continus-discrets : vers une approche unifiée

Paul Caspi Chiheb Kossentini

Verimag/CNRS *Airbus France*

FAC05, Toulouse, mars 2005

– Quelques observations
– Quelques problèmes
– Une direction de recherche
– Conclusion

Quelques observations

(Airbus, Framatome, Westinghouse, Maggaly, Meteor,. . .)

– La mise en œuvre par ordinateur de systèmes de contrôle-commande continus trouve des solutions satisfaisantes dans la théorie des systèmes de commande échantillonnés

théorie de l'échantillonnage en fréquence + analyse numérique + stabilité

⇒ échantillonnage périodique (Simulink, langages synchrones, time-triggered systems, . . .)

Quelques observations

– La mise en œuvre par ordinateur de systèmes de contrôle-commande à événements discrets trouve des solutions dans la théorie mathématique des systèmes de commande à événements discrets

$\Rightarrow$ Stateflow, langages synchrones, event-triggered systems

– Que faire dans les cas mixtes (hybrides) ?

Que faire dans les cas mixtes ?

- Etendre l’approche à événements discrets aux cas continus ?
  - intégration à pas variable ? ? ?
  - ordonnancements complexes ? ? ?

Que faire dans les cas mixtes ?

- Etendre l’approche à événements discrets aux cas continus ?
  - intégration à pas variable ? ? ?
  - ordonnancements complexes ? ? ?

- Echantillonner les systèmes à événements discrets ?
  C’est l’approche qui semble la plus populaire en pratique

  Elle se heurte à l’absence d’une théorie satisfaisante de l’échantillonnage périodique des systèmes à événements discrets
  Cette pratique repose le plus souvent sur des recettes « maison » peu ou pas théorisées parfois issues de la théorie des circuits asynchrones

$\Rightarrow$ formations « maison », pas d’enseignement, pas de livres, pas de recherche

Problèmes d'échantillonnage

L'échantillonnage des systèmes à événements discrets pose des problèmes d'asynchronisme

- L'échantillonnage des entrées n'est pas déterministe

- Le blocage des sorties n'est pas déterministe

$\Rightarrow$ possibilités de courses critiques

Les outils de simulation et validation usuels (par exemple Simulink/Stateflow) ne permettent pas de mettre ces phénomènes en évidence

Courses

Une course se produit quand deux signaux discrets peuvent changer en même temps ou non en fonction de divers aléas

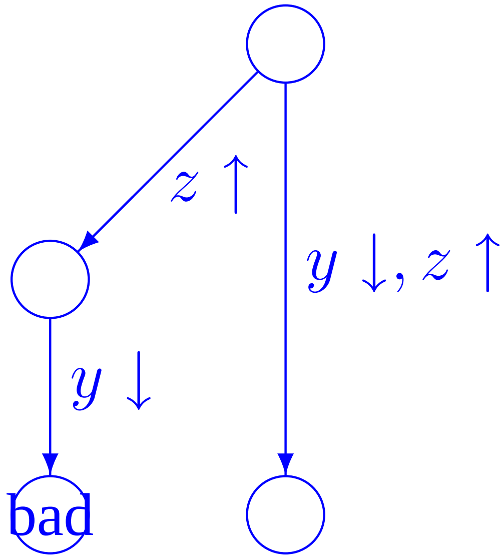
Une course est critique si des états distincts peuvent être atteints selon qui gagne la course

Courses

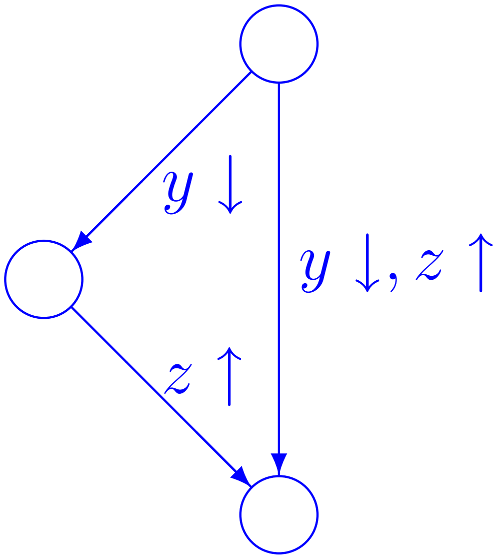
Une course se produit quand deux signaux discrets peuvent changer en même temps ou non en fonction de divers aléas

Une course est critique si des états distincts peuvent être atteints selon qui gagne la course

Une course critique

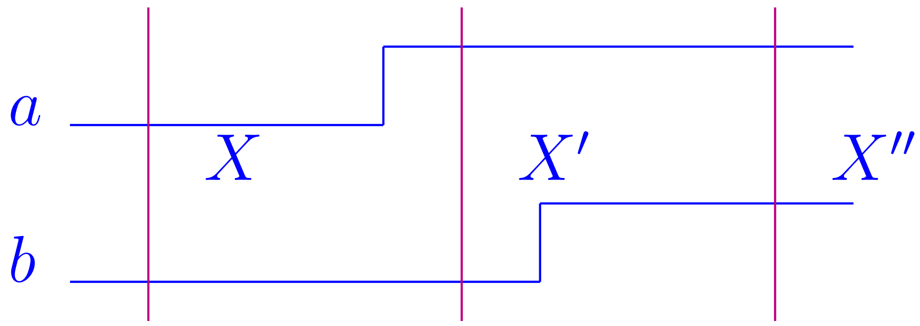


Une course non critique



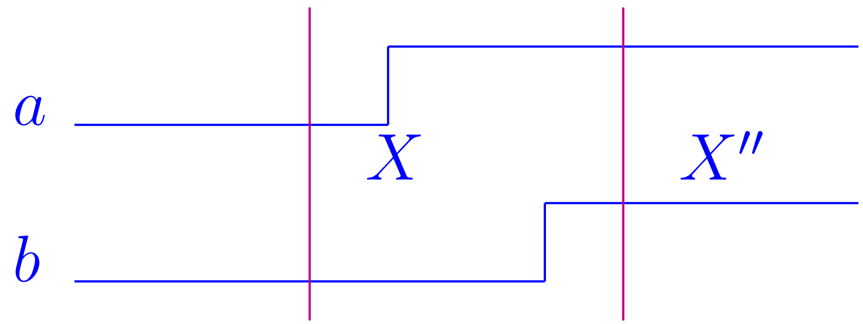
Echantillonnage de tuples

Un échantillonnage possible



Echantillonnage de tuples

Un autre échantillonnage possible



Possibilité de course

Blocage de sorties

Exemple : une exclusion mutuelle

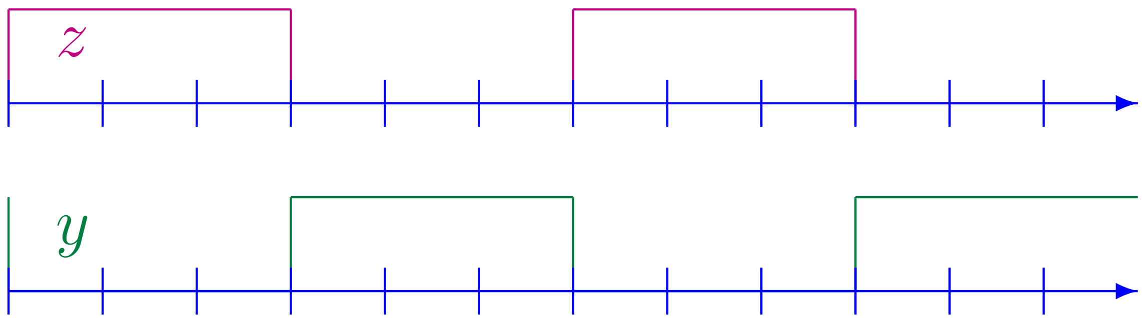
```
always not (y and z)
```

Blocage de sorties

Exemple : une exclusion mutuelle

```
always not (y and z)
```

Une solution peu robuste :



Une preuve « synchrone » de cette solution est-elle fiable ?

Recettes asynchrones

Insérer des délais (fonction de confirmation d'Airbus)

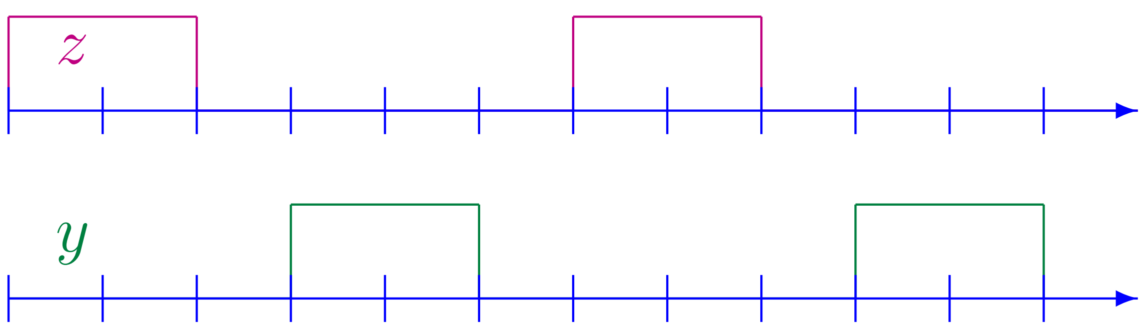
Insérer des chaînes de causalité interdisant les courses

Recettes asynchrones

Insérer des délais (fonction de confirmation d'Airbus)

Insérer des chaînes de causalité interdisant les courses

– z attend que y descende pour monter et réciproquement

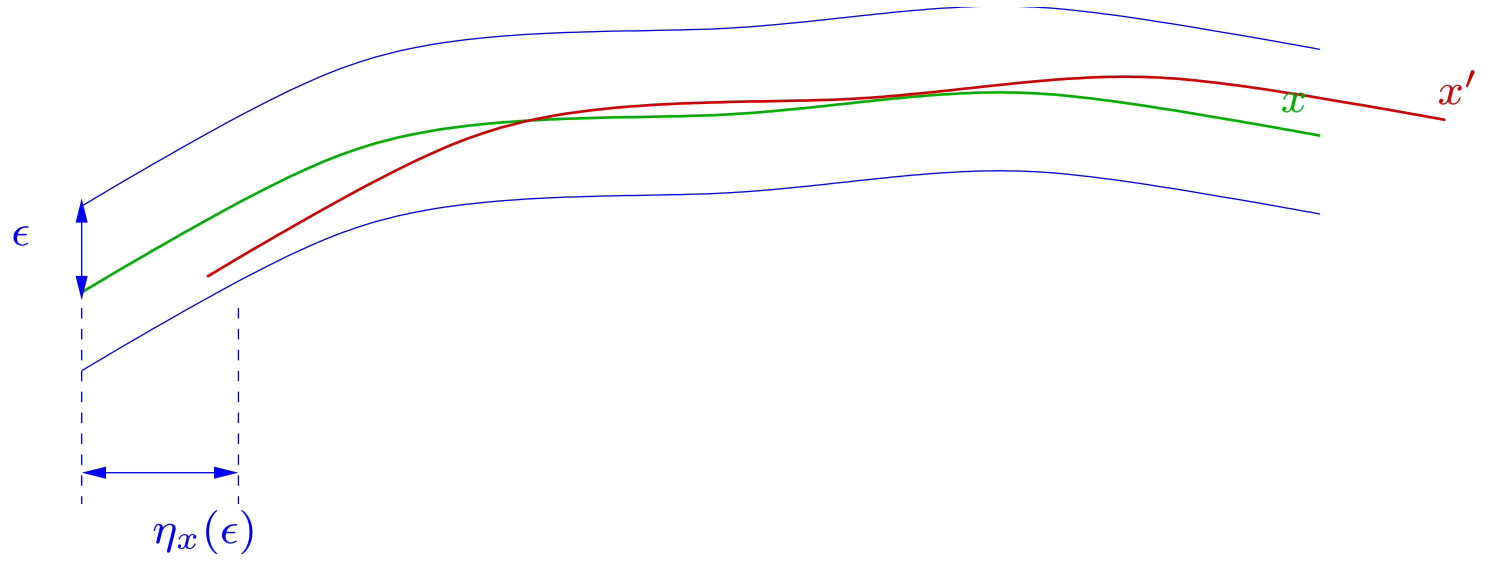


Que manque-t-il ?

$$\boxed{\text{Une théorie de l'échantillonnage}}$$

Echantillonnage : signaux continus

Un signal x est échantillonnable s'il est uniformément continu



$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta_x > 0, \forall t, t', |t - t'| \leq \eta_x \Rightarrow |x(t) - x(t')| \leq \epsilon$$

Redatation

Changement ou distorsion du temps :

- $r : T \longrightarrow T$
- r non décroissante

Cas particuliers :

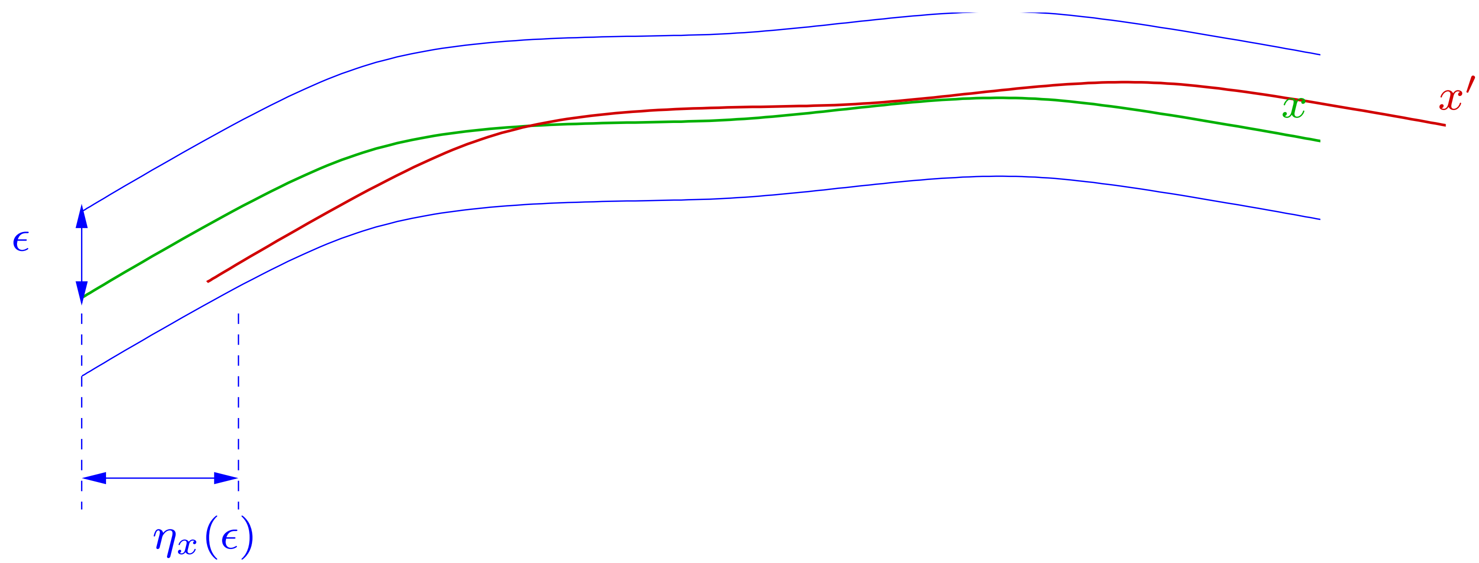
- bornée : $||r - id||_\infty \leq \delta$
- bijective $=>$ continue

Exemples d'application :

- échantillonnage périodique de période T : $r(t) = \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor$
- retard pur : $r(t) = t - \delta$

Echantillonnage : signaux continus

Un signal x est échantillonnable s'il est uniformément continu



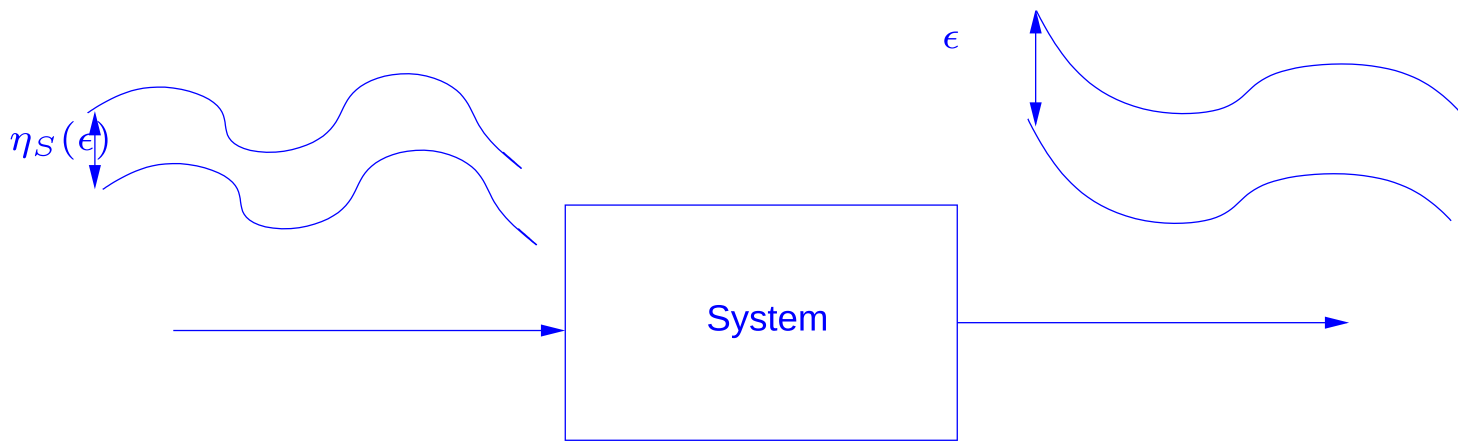
$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta_x > 0, \forall t, t', |t - t'| \leq \eta_x \Rightarrow |x(t) - x(t')| \leq \epsilon$$

qui peut être reformulée en :

$$\exists \eta_x > 0, \forall \epsilon > 0, \forall \; retiming \; r, ||r - id||_\infty \leq \eta_x(\epsilon) \Rightarrow ||x - x \circ r||_\infty \leq \epsilon$$

Echantillonnage : systèmes

Un système est échantillonnable s'il est uniformément continu



$$\exists \eta_S > 0, \forall \epsilon > 0, \forall\ x, x' ||x - x'||_\infty \leq \eta_S(\epsilon) \Rightarrow ||Sx - Sx'||_\infty \leq \epsilon$$

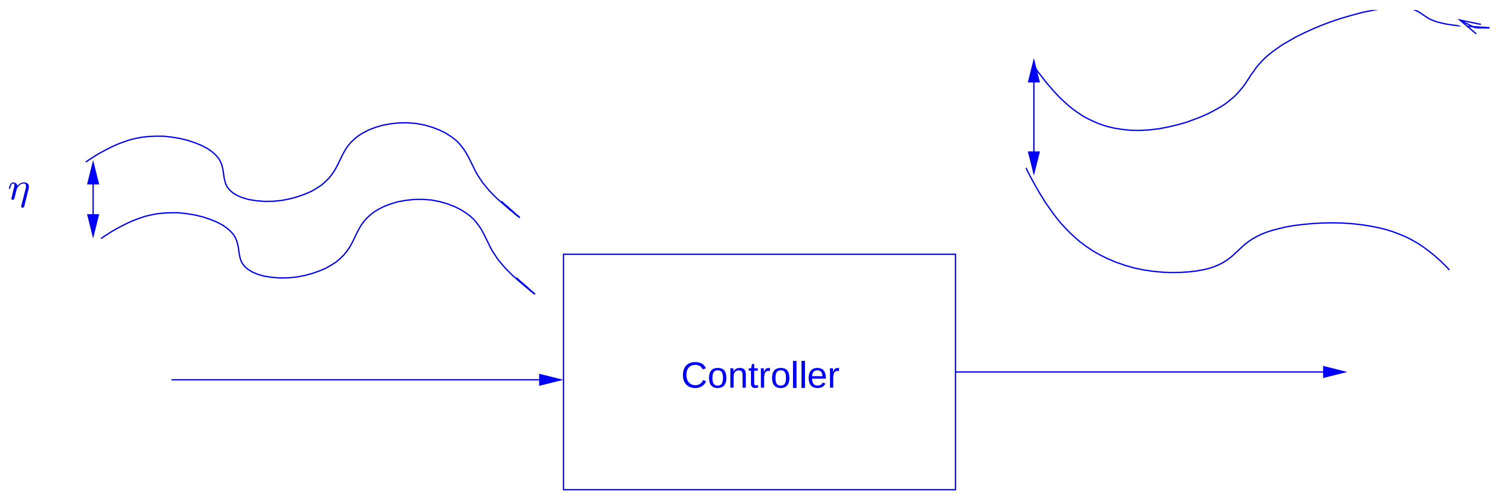
Un système stationnaire, alimenté par un signal échantillonnable fournit une sortie échantillonnable

(il y a des rapports étroits avec la stabilité)

Echantillonnage : systèmes

En réalité, c'est un peu plus compliqué : beaucoup de systèmes ne sont pas échantillonnables

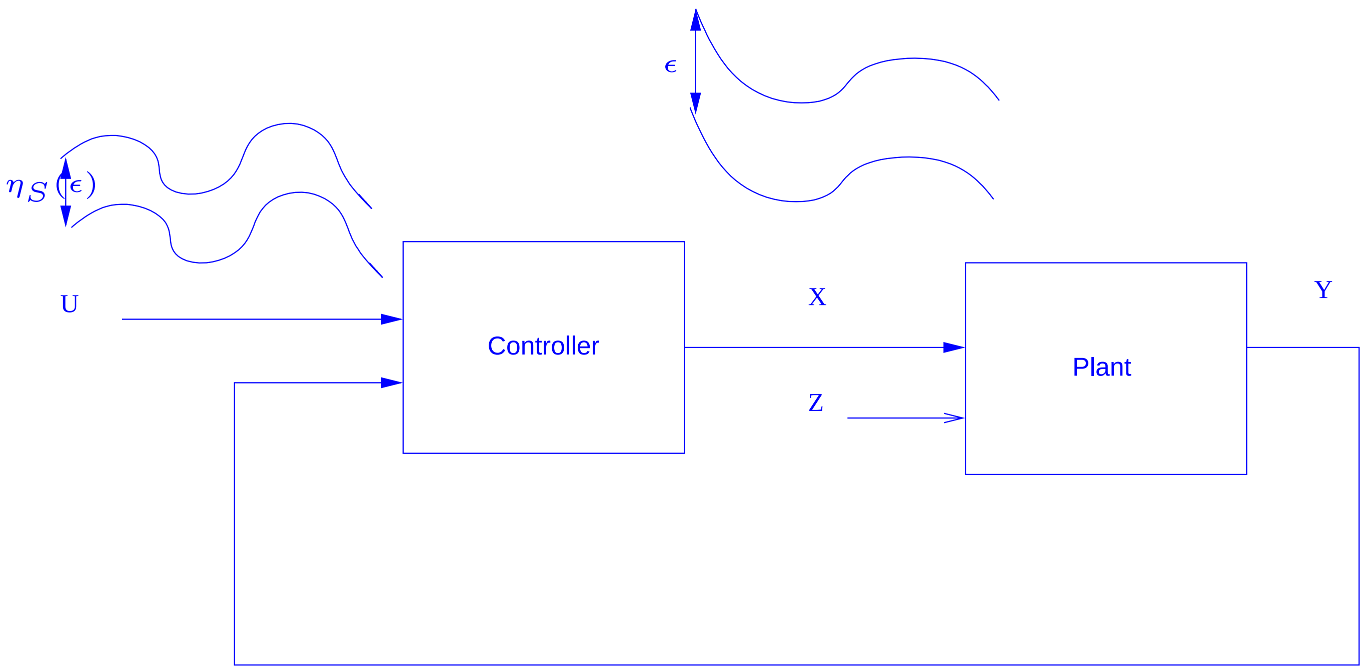
Exemple : un PID



Echantillonnage : systèmes

En réalité, c'est un peu plus compliqué : beaucoup de systèmes ne sont pas échantillonnables

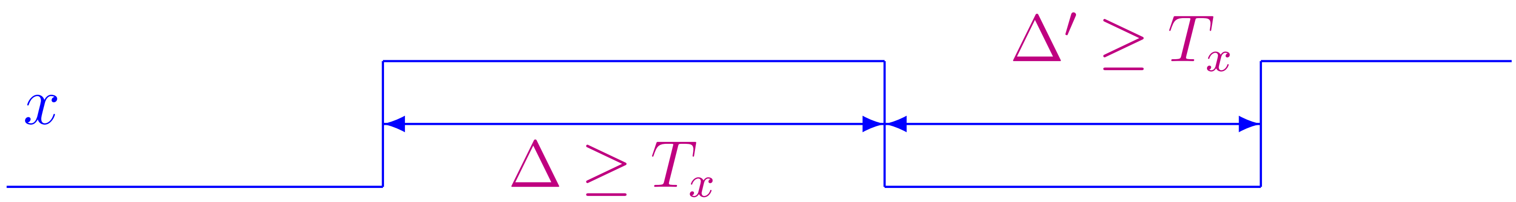
Ils le deviennent en boucle fermée



Une Première tentative

Les signaux booléens échantillonnables sont les signaux à variabilité uniformément bornée :

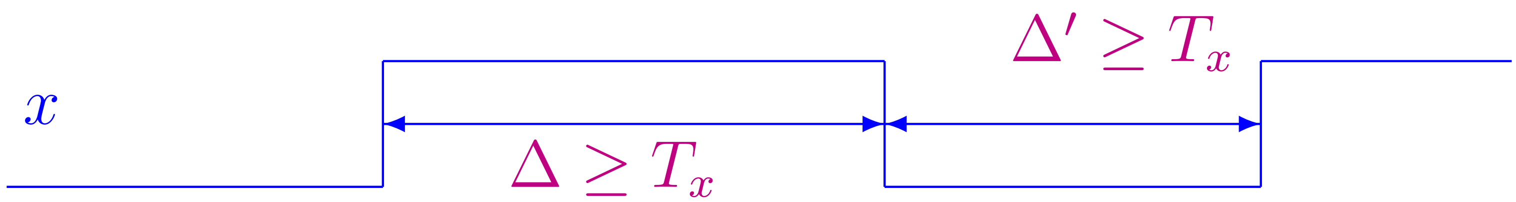
Il existe un temps de stabilité minimum T_x associé au signal x.



Une Première tentative

Les signaux booléens échantillonnables sont les signaux à variabilité uniformément bornée :

Il existe un temps de stabilité minimum T_x associé au signal x.



Mais ce n'est pas topologique

Ces signaux sont aussi ceux uniformément continus par rapport à la distance de Skorokhod (Caspi Benveniste 02)

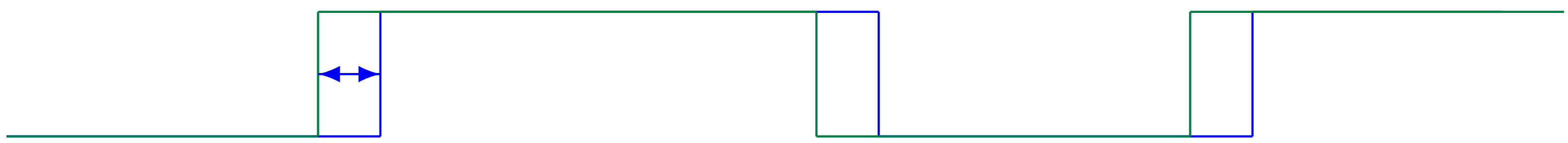
On récupère la topologie et cela s'étend aux signaux hybrides (continus par morceaux)

Distance de Skorokhod

Fondée sur les redatations bijectives :

$$d_S(x,y) = \inf_{r \in BR} ||r - id||_\infty + ||x \circ r - y||_\infty$$

Exemple booléen : le plus grand décalage entre fronts correspondants

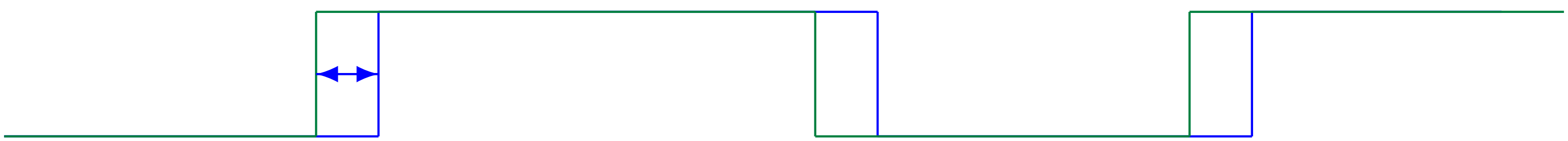


Distance de Skorokhod

Fondée sur les redatations bijectives :

$$d_S(x,y) = \inf_{r \in BR} ||r - id||_\infty + ||x \circ r - y||_\infty$$

Exemple booléen : le plus grand décalage entre fronts correspondants



Problème : les fonctions booléennes combinatoires ne sont pas uniformément continue : topologie trop fine

Une voie possible

Topologie non métrique fondée sur la définition de boules ouvertes :

$$B(x; T, \epsilon) = \{\ y \mid \sup_t \int_t^{t+T} \frac{|x-y|}{T} < \epsilon\ \}$$

Propriétés :

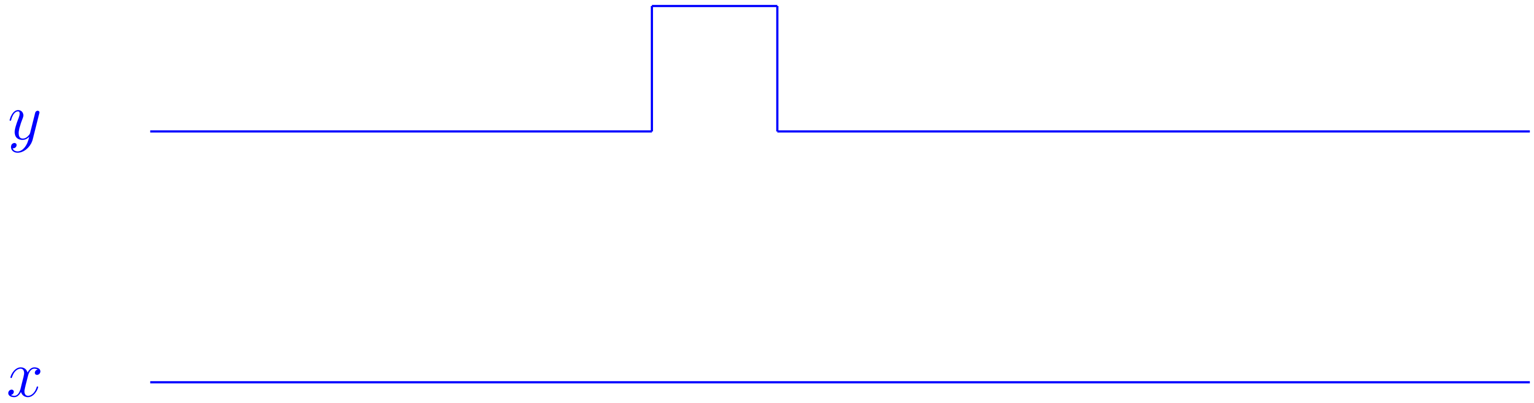
– définit bien une topologie

– généralise la distance $|| \ ||_\infty$

$$\lim_{T \to 0} \sup_t \int_t^{t+T} \frac{|x-y|}{T} = ||x-y||_\infty$$

Intérêts

– filtre les transitoires courts



x et y sont voisins, ce qui n'est pas le cas avec Skokhorod

Signaux uniformément continus

Un signal x est UC si il existe une fonction positive $\eta_x(T, \epsilon)$ telle que

- pour tout $\epsilon, T > 0$,
- pour tout r avec $||r(t) - id||_\infty \leq \eta_x(T, \epsilon)$

$x \circ r$ appartient à $\bar{B}(x; T, \epsilon)$

Exemples :

- Les signaux uniformément continus au sens usuel
- Les signaux booléens à variabilité uniformément bornée

Signaux uniformément continus

Propriété fondamentale

Soit x UC et

$$n = \left\lceil \frac{T}{\inf\{T, \eta_x(T,\epsilon)\}} \right\rceil$$

Alors, il existe, dans tout intervalle de durée T, un intervalle de durée $h = \frac{T}{n}$ tel que, pour tout t, t' dans cet intervalle,

$$|x(t) - x(t')| \leq 2\epsilon$$

Voteurs mixtes à seuil et délai

Si x et x' sont UC et si

$$x' \in \bar{B}(x; T, \epsilon)$$

alors, il existe, dans tout intervalle de durée T, un sous-intervalle de durée T' sur lequel

$$|x - x'| \leq 3\epsilon$$

Corollaire :

Si on échantillonne plus vite que T', en l'absence de défaillance, deux répliques ne peuvent différer continûment de plus de 3ϵ pendant plus de $T - T'$

C'est le principe des voteurs $2/2$ d'Airbus

Systèmes uniformément continus

Un système S est UC si il existe une fonction positive $\eta_S(T, \epsilon)$ telle que

– pour tout $T, \epsilon > 0$,

– pour tout x, x' avec x' appartient à $\bar{B}(x; \eta_S(T, \epsilon))$

$S(x')$ appartient à $\bar{B}(S(x); T, \epsilon)$

Exemples :

– Les systèmes uniformément continus au sens usuel sont UC.

– Les systèmes booléens combinatoires sont UC.

Assez satisfaisant

Questions en suspens

– Qu'est-ce que la stabilisation par feed-back dans ce contexte ? (relations avec l'évitement de courses critiques, les protocoles, les ordres partiels ?)

– Comment calculer les fonctions d'erreur η_S pour des systèmes complexes (analyse numérique) ?

– ...

Questions en suspens

– Qu'est-ce que la stabilisation par feed-back dans ce contexte ? (relations avec l'évitement de courses critiques, les protocoles, les ordres partiels ?)

– Comment calculer les fonctions d'erreur η_S pour des systèmes complexes (analyse numérique) ?

– …

– Plus généralement, les automaticiens continus, automaticiens discrets et informaticiens industriels se parlent-ils suffisamment ?